Osamääräkunta

LuK-tutkielma
Jerry Korpi
2507909
Matematiikan tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Kevät 2020

Sisältö

Johdanto

Tutkielmassa on käytetty pääasiassa teosta [1] materiaalina osamääräkunnista. Lisäksi lähteenä on käytetty kursseja [2] ja [3]. Niistä tarvittavaa tietoa on tiivistetty lukuun 1. Tarkempaa pohjatietoa löytyy itse kursseilta.

Tutkielman pääaihe on osamääräkunnan rakentaminen ja todistaminen, että tälläinen rakennelma on mahdollista tehdä. Itse osamääräkunta on siis eräänlainen laajennus mille tahansa kokonaisalueelle. Tämä laajennus tulee olemaan kunta ja tarkemmin pienin mahdollinen kunta, joka sisältää alkuperäisen kokonaisalueen. Esimerkiksi kokonaisalueesta $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ muodostuva osamääräkunta tulee olemaan rationaalilukujen muodostama kunta $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Tästä voikin oikeastaan katsoa helposti mallia esimerkiksi juuri operaatiomääritelmissä, sillä tutkielman osamääräkunnan operaatiot ovat toiminnaltaan samat kuin kunnalla $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Myös lavennus ja supistaminen tulee toimimaan osamääräkunnassa kuten se toimii rationaalilukujen kanssa.

Osamääräkunnan rakennuksessa itsessään tullaan hyödyntämään karteesistatuloa ja ekvivalenssiluokkia, jotta saadaan rakennettua sopivat alkiot osamääräkuntaan. Tämän jälkeen tarvitaan homomorfismia ja isomorfismia, jotta sekä saadaan yhdistettyä kokonaisalue itse osamääräkuntaan, että voidaan todeta muiden kuntien, jotka sisältävät kokonaisalueen, sisältävän kokonaisalueen osamääräkunnan.

1 Abstrakti algebra

1.1 Rakenteita

Osamääräkunnan rakennusta varten tarvitaan esitietona algebraalisia rakenteita, joten aloitetaan esittelemällä meille tarpeelliset rakennelmat ja niille kuuluvat perusominaisuudet. Nämä rakenteet on esitelty kursseilla Algebran perusteet ja Algebralliset rakenteet ja niihin liittyvät todistukset löytyvät myös kyseisiltä kursseilta.

Määritelmä 1.1. Joukko A ja operaatio $*$ muodostavat *ryhmän* $(A,*)$, kun ne toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $A \neq \emptyset$,
2. $a * b \in A$ kaikilla $a, b \in A$,
3. $(a * b) * c = a * (b * c)$ kaikilla $a, b, c \in A$,
4. On olemassa $e \in A$ siten, että $e * a = a$ ja $a * e = a$ kaikilla $a \in A$,
5. Kaikille $a \in A$ on olemassa $b \in A$, jolla $a * b = e$ ja $b * a = e$.

Ryhmä $(A,*)$ on *abelin ryhmä*, kun sen operaatio on kommutatiivinen. Eli toteuttaa ehdon $a * b = b * a$ kaikilla $a, b \in A$.

Kohdan 4 alkiota e kutsutaan ryhmän *neutraalialkioksi* ja kohdan 5 alkiota b kutsutaan alkion a *käänteisalkioksi* ja sitä merkitään a^{-1}.

Määritelmä 1.2. Joukko A ja operaatio $*$ muodostavat *monoidin* $(A,*)$, kun ne toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $A \neq \emptyset$,
2. $a * b \in A$ kaikilla $a, b \in A$,
3. $(a * b) * c = a * (b * c)$ kaikilla $a, b, c \in A$,
4. On olemassa $e \in A$ siten, että $e * a = a$ ja $a * e = a$ kaikilla $a \in A$.

Kohdan 4 alkiota e kutsutaan monoidin *neutraalialkioksi*.

Määritelmä 1.3. Joukko R ja operaatiot $+$ ja $\times$ muodostavat *renkaan* $(R, +, \times)$, kun ne toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $(R, +)$ on abelin ryhmä,
2. $(R, \times)$ on monoidi,
3. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ ja $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Rengas $(R, +, \times)$ on *kommutatiivinen rengas*, jos sen operaatio $\times$ on kommutatiivinen eli $a \times b = b \times a$ kaikilla $a, b \in R$.

Renkaan $(R, +, \times)$ ryhmän $(R, +)$ neutraalialkiota kutsutaan *nolla-alkioksi*, jota merkitään 0_R. Monoidin $(R, \times)$ neutraalialkiota puolestaan kutsutaan *ykkösalkioksi* ja sitä merkitään 1_R. Ryhmän $(R, +)$ alkion a käänteisalkiota kutsutaan alkion a *vasta-alkioksi* ja sitä merkitään $-a$.

Lause 1.4. *Renkaalle $(R, +, \times)$ pätee seuraavat laskutoimitukset kaikilla renkaan alkioilla a ja $b \in R$:*

1. $0_R \times a = a \times 0_R = 0_R$,
2. $a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$,
3. $(-a) \times (-b) = a \times b$.

Määritelmä 1.5. Renkaan $(R, +, \times)$ epätyhjä osajoukko S on sen *alirengas*, jos $(S, +, \times)$ on rengas ja sillä on sama ykkösalkio kuin renkaalla $(R, +, \times)$.

Lause 1.6. *Renkaan $(R, +, \times)$ epätyhjä osajoukko S on renkaan R alirengas, jos ja vain jos seuraavat ehdot pätevät:*

1. $a + (-b) \in S$ *kaikilla* $a, b \in S$,
2. $a \times b \in S$ *kaikilla* $a, b \in S$,
3. $1_R \in S$.

Määritelmä 1.7. Joukko D ja operaatiot $+$ ja $\times$ muodostavat *kokonaisalueen* $(D, +, \times)$, kun ne toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $(D, +, \times)$ on kommutatiivinen rengas,
2. Jos a ja $b \in D$ ja $a \times b = 0_D$, niin $a = 0_D$ tai $b = 0_D$.

Lause 1.8. *Kokonaisalueessa $(D, +, \times)$ pätee supistuslause kaikilla alkioilla a, b ja $c \in D$, joista alkio c on erisuuri kuin kokonaisalueen nolla-alkio 0_D. Tällöin*

$$a \times c = b \times c \Rightarrow a = b.$$

Määritelmä 1.9. Joukko K ja operaatiot $+$ ja $\times$ muodostavat *kunnan* $(K, +, \times)$, kun ne toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $(K, +, \times)$ on kommutatiivinen rengas,
2. Kaikilla $a \in K \setminus \{0_K\}$ on olemassa $b \in K \setminus \{0_K\}$, jolla $a \times b = 1_K$.

Kohdan 2 mukaista käänteisalkiota b alkiolle a merkitään a^{-1}.

Määritelmä 1.10. Kolmikko $(K, +, \times)$ on kunnan $(F, +, \times)$ *alikunta*, jos joukko K on epätyhjä, joukko K on joukon F osajoukko ja kolmikko $(K, +, \times)$ on kunta.

1.2 Työkaluja

Eräs tarvittava palanen osamääräkuntien rakentamisessa tulee olemaan ekvivalenssirelaatio ja ekvivalenssiluokat. Lisäksi tarvitaan isomorfismia ja tähän liittyvää tulosta. Esitellään nämä nyt.

Määritelmä 1.11. Relaatio $\sim$ on *ekvivalenssirelaatio* joukossa A, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. $a \sim a$,
2. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$,
3. Jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$,

kaikilla $a, b, c \in A$.

Määritelmä 1.12. Olkoon ekvivalenssirelaatio $\sim$ ja joukko A. Nyt alkion $a \in A$ määräämä *ekvivalenssiluokka* $[a]$ on joukko

$$[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

Määritelmä 1.13. Olkoon renkaat $(A, +, \times)$ ja $(B, \oplus, \otimes)$ sekä kuvaus $f : A \to B$. Kuvaus f on *homomorfismi*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ kaikilla $a, b \in A$,
2. $f(a \times b) = f(a) \otimes f(b)$ kaikilla $a, b \in A$,
3. $f(1_A) = 1_B$.

Jos kuvaus f on lisäksi bijektio, kutsutaan sitä *isomorfismiksi*.

Lause 1.14. *Olkoon renkaat $(A, +, \times)$ ja $(B, \oplus, \otimes)$ sekä homomorfinen kuvaus $f : A \to B$. Tällöin joukko $f[A]$ on renkaan B alirengas, kun*

$$f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

2 Osamääräkunnan rakennus

Nyt, kun meillä on määritelmät tarpeellisille abstrakteille rakenteille, voimme siirtyä rakentamaan varsinaista osamääräkuntaa kokonaisalueesta. Otetaan mukaan mielivaltainen kokonaisalue $(D, +, \times)$.

2.1 Joukon F alkioiden määrittäminen

Varsinainen joukko F tulee koostumaan ekvivalenssiluokista. Määritetään sitä ennen kuitenkin alustava joukko S karteesisentulon avulla, mutta otetaan kuitenkin tästä joukosta pois alkiot, joissa toisena komponenttina on kokonaisalueen $(D, +, \times)$ nolla-alkio 0_D. Siis

$$S = \{(a, b) \mid a, b \in D, b \neq 0_D\}.$$

Määritelmä 2.1. Määritetään relaatio $\sim$ joukkoon S niin, että $(a, b) \sim (c, d)$, kun $a \times d = b \times c$. Operaatio $\times$ on kokonaisalueen D operaatio ja alkiot a, b, c, d ovat kokonaisalueen D alkioita.

Lemma 2.2. *Määritelmässä 2.1 määritelty relaatio $\sim$ on itseasiasissa ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Käydään läpi ekvivalenssirelaation määritelmän 1.11 vaatimukset. Olkoon alkiot a, b, c joukosta S. Tarkemmin $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ ja $c = (c_1, c_2)$.
Tutkitaan nyt ensimmäinen kohta

$$a \sim a \Leftrightarrow a_1 \times a_2 = a_2 \times a_1.$$

Operaatio $\times$ on kommutatiivinen kokonaisalueessa $(D, +, \times)$, joten $a_1 \times a_2 = a_2 \times a_1$.

Seuraavaksi tutkitaan toinen kohta $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$.
Lähdetään osasta $a \sim b$ liikkeelle. Käytetään taas hyväksi kommutatiivisuuttä joukossa D operaation $\times$ suhteen.
Nyt

$$a \sim b \Leftrightarrow a_1 \times b_2 = a_2 \times b_1 \Leftrightarrow b_2 \times a_1 = b_1 \times a_2 \Leftrightarrow b_1 \times a_2 = b_2 \times a_1 \Leftrightarrow b \sim a.$$

Ja lopuksi osoitetaan viimeinen kohta, kun $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$. Nyt siis tiedetään, että

$$a \sim b \Leftrightarrow a_1 \times b_2 = a_2 \times b_1 \text{ ja } b \sim c \Leftrightarrow b_1 \times c_2 = b_2 \times c_1.$$

Nyt

$$a_1 \times c_2 \times b_2 = c_2 \times a_1 \times b_2 = c_2 \times a_2 \times b_1 = a_2 \times b_1 \times c_2 = a_2 \times b_2 \times c_1.$$

Ja nyt joukon S määritelmän mukaan $b_2 \neq 0_D$, joten rengaalta periytyvät lauseen 1.8 nojalla

$$a_1 \times c_2 \times b_2 = a_2 \times c_1 \times b_2 \Leftrightarrow a_1 \times c_2 = a_2 \times c_1.$$

Siis $a \sim c$. □

Otetaan nyt kaikki joukosta S muodostuvat ekvivalenssiluokat joukon F alkioiksi. Merkitään näitä ekvivalenssiluokkia hakasulkeilla tapaan $[(a_1, a_2)]$.

2.2 Joukon F operaatioiden määrittäminen

Joukon F alkiot ovat siis

$$F = \{[(a_1, a_2)] \mid a_1, a_2 \in D \text{ ja } a_2 \neq 0_D\}.$$

Lähdetään määrittämään operaatioita alkioille joukossa F käyttäen hyväksi kokonaisalueen $(D, +, \times)$ operaatioita.

Lemma 2.3. *Alkiot $[(a_1, a_2)]$ ja $[(b_1, b_2)]$ joukosta F muodostavat hyvin määritetyt operaatiot, kun yhteenlasku määritellään*

$$[(a_1, a_2)] \oplus [(b_1, b_2)] = [(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1, a_2 \times b_2)]$$

ja puolestaan kertolasku määritellään

$$[(a_1, a_2)] \otimes [(b_1, b_2)] = [(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2)].$$

Todistus. Ensinnäkin varmistetaan, että operaation tuotokset $(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1, a_2 \times b_2)$ ja $(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2)$ kuuluvat joukkoon S. Alkioiden ensimmäisille komponenteille riittää, että ne kuuluvat joukkoon D ja koska D on kokonaisalue ja alkiot a_1, a_2, b_1 ja b_2 kuuluvat joukkoon D, niin näiden alkioiden operaatiot keskenään kuuluvat myös joukkoon D. Täten ensimmäisen komponentin osalta alkiot kuuluisivat joukkoon S. Toisella komponentilla on lisävaatimuksena, että se ei ole joukon D nolla-alkio. Tässä puolestaan tiedetään, että a_2 ja b_2 ovat eri suuria kuin joukon D nolla-alkio, koska ne ovat joukon S alkioiden toisena komponenttina. Lisäksi, koska D on kokonaisalue siellä ei ole nollan tekijöitä, joilloin $a_2 \times b_2$ on eri suuri kuin joukon D nolla-alkio aina, kun a_2 ja b_2 ovat eri suuria kuin joukon D nolla-alkio. Ja täten operaatioiden tulokset kuuluvat joukkoon S ja tätä myötä niiden määräämät ekvivalenssiluokat joukkoon F.

Ekvivalenssiluokkia käyttäessä joudutaan kuitenkin vielä varmistamaan, että ekvivalenssiluokan eri alkiot operoituna keskenään tuottavat vastauksena saman ekvivalenssiluokan. Otetaan siis joukosta F kaksi mielivaltaista alkiota $[(A_1, A_2)]$ ja $[(B_1, B_2)]$ ja näistä molemmista mielivaltaiset ekvivalenssiluokan jäsenet $(a_1, a_2) \in [(A_1, A_2)]$ ja $(b_1, b_2) \in [(B_1, B_2)]$. Näiden luokkien jäsenten operaatiot keskenään kuuluisi kuulua vastaavien ekvivalenssiluokkien operaatioiden muodostamiin ekvivalenssiluokkiin. Eli siis yhteenlaskuoperaatiolla tulisi toimia

$$(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1, a_2 \times b_2) \in [(A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1, A_2 \times B_2)]$$

ja kertolaskuoperaatiolla tulisi päteä

$$(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2) \in [(A_1 \times B_1, A_2 \times B_2)].$$

Käytetään hyväksi tiedettyjä ekvivalensseja eli

$$(a_1, a_2) \in [(A_1, A_2)] \Rightarrow (a_1, a_2) \sim (A_1, A_2) \Rightarrow a_1 \times A_2 = a_2 \times A_1$$

ja

$$(b_1, b_2) \in [(B_1, B_2)] \Rightarrow (b_1, b_2) \sim (B_1, B_2) \Rightarrow b_1 \times B_2 = b_2 \times B_1.$$

Tutkitaan ensin yhteenlaskun tilanne. Kerrotaan yhtälöä $a_1 \times A_2 = a_2 \times A_1$ tulolla $b_2 \times B_2$ ja yhtälöä $b_1 \times B_2 = b_2 \times B_1$ tulolla $a_2 \times A_2$ ja summataan nämä yhtälöt yhteen, jolloin saadaan

$$(a_1 \times A_2) \times (b_2 \times B_2) + (b_1 \times B_2) \times (a_2 \times A_2)$$

$$= (a_2 \times A_1) \times (b_2 \times B_2) + (b_2 \times B_1) + (a_2 \times A_2)$$

Tästä voidaan edetä käyttämällä hyväksi kokonaisalueen laskusääntöjä, assosiatiivisuutta ja kommutatiivisuutta kerto-operaation suhteen sekä osittelulakeja. Saadaan

$$(a_1 \times A_2) \times (b_2 \times B_2) + (b_1 \times B_2) \times (a_2 \times A_2)$$

$$= (a_2 \times A_1) \times (b_2 \times B_2) + (b_2 \times B_1) \times (a_2 \times A_2)$$

eli

$$(a_1 \times b_2) \times (A_2 \times B_2) + (b_1 \times a_2) \times (A_2 \times B_2)$$
$$= (a_2 \times b_2) \times (A_1 \times B_2) + (a_2 \times b_2) \times (A_2 \times B_1)$$

eli

$$(a_1 \times b_2 + b_1 \times a_2) \times (A_2 \times B_2)$$

$$= (a_2 \times b_2) \times (A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1).$$

Tästä nyt saadaan ekvivalenssirelaatio

$$(a_1 \times b_2 + b_1 \times a_2, a_2 \times b_2) \sim (A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1, A_2 \times B_2),$$

jonka perusteella

$$(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1, a_2 \times b_2) \in [(A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1, A_2 \times B_2)].$$

Tutkitaan vielä kerto-operaation tilanne. Kerrotaan yhtälöt $a_1 \times A_2 = a_2 \times A_1$ ja $b_1 \times B_2 = b_2 \times B_1$ ja käytetään hyväksi kerto-operaation kommutatiivisuutta ja assosiatiivisuutta kokonaisalueessa. Saadaan

$$(a_1 \times A_2) \times (b_1 \times B_2) = (a_2 \times A_1) \times (b_2 \times B_1)$$

eli

$$(a_1 \times b_1) \times (A_2 \times B_2) = (a_2 \times b_2) \times (A_1 \times B_1).$$

Tämä osoittaa nyt ekvivalenssirelaation

$$(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2) \sim (A_1 \times B_1, A_2 \times B_2),$$

josta nähdään

$$(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2) \in [(A_1 \times B_1, A_2 \times B_2)].$$

□

Joukkoon F on nyt määritelty alkiot ja operaatiot. Seuraavaksi voidaankin jo siirtyä todistamaan kolmikkoa $(F, \oplus, \otimes)$ kunnaksi.

2.3 Joukon F todistus kunnaksi

Kunnan ehdot määriteltiin jo aiemmin, joten lähdetään nyt käymään niitä läpi. Aloitetaan todistamalla pari $(F, \oplus)$ abelin ryhmäksi.

Todistus. D on kokonaisalue, joten sieltä löytyy ainakin ykkösalkio 1_D. Täten alkio $(1_D, 1_D)$ kuuluu joukkoon S ja se määrää ekvivalenssiluokan $[(1_D, 1_D)]$, joka puolestaan löytyy joukosta F. Nyt joukossa F on ainakin yksi alkio.

Binäärisyys todistettiin jo operaatiota $\oplus$ määritellessä joukossa F.

Assosiatiivisuus puolestaan vaatii, että $(a+b)+c = a+(b+c)$ kaikilla $a, b, c \in F$. Otetaan siis mielivaltaiset alkiot $[(a_1, a_2)]$, $[(b_1, b_2)]$ ja $[(c_1, c_2)]$, jotka kuuluvat joukkoon F. Nyt

$$\begin{aligned}
([(a_1, a_2)] \oplus [(b_1, b_2)]) \oplus [(c_1, c_2)] &= [(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1, a_2 \times b_2)] \oplus [(c_1, c_2)] \\
&= [((a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1) \times c_2 + (a_2 \times b_2) \times c_1, (a_2 \times b_2) \times c_2)] \\
&= [(a_1 \times b_2 \times c_2 + a_2 \times b_1 \times c_2 + a_2 \times b_2 \times c_1, a_2 \times (b_2 \times c_2))] \\
&= [(a_1 \times (b_2 \times c_2) + a_2 \times (b_1 \times c_2 + b_2 \times c_1), a_2 \times (b_2 \times c_2))] \\
&= [(a_1, a_2)] \oplus [(b_1 \times c_2 + b_2 \times c_1, b_2 \times c_2)] \\
&= [(a_1, a_2)] \oplus ([(b_1, b_2)] \oplus [(c_1, c_2)]).
\end{aligned}$$

Tutkitaan määritelmän järjestyksestä poiketen seuraavaksi kommutatiivisuus, jotta meidän ei tarvitse tarkistaa molempia puolia lopuissa vaatimuksissa. Eli otetaan alkiot $a = [(a_1, a_2)]$ ja $b = [(b_1, b_2)]$ joukosta F ja lähdetään katsomaan toteutuuko yhtälö $a+b = b+a$. Käytetään hyväksi kokonaisalueen D operaatioiden kummutatiivisuutta. Nyt

$$\begin{aligned}
[(a_1, a_2)] \oplus [(b_1, b_2)] &= [(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1, a_2 \times b_2)] \\
&= [(b_1 \times a_2 + b_2 \times a_1, b_2 \times a_2)] \\
&= [(b_1, b_2)] \oplus [(a_1, a_2)].
\end{aligned}$$

Joukko F ja sen yhteenlaskuoperaatio on siis kommutatiivinen.

Jatketaan etsimällä neutraalialkio yhteenlaskuoperaatiolle eli nolla-alkio. Tämä alkio tulee olemaan $[(0_D, 1_D)]$. Todistetaan tämä käyttäen mielivaltaista joukon F alkiota $[(a_1, a_2)]$. Käytetään tässä hyväksi kokonaisalueen D laskusääntöjä. Nyt

$$\begin{aligned}
[(a_1, a_2)] \oplus [(0_D, 1_D)] &= [(a_1 \times 1_D + a_2 \times 0_D, a_2 \times 1_D)] \\
&= [(a_1 + 0_D, a_2)] \\
&= [(a_1, a_2)].
\end{aligned}$$

Koska operaatiolle todistettiin kommutatiivisuus, tästä nähdään myös helposti

$$[(0_D, 1_D)] \oplus [(a_1, a_2)] = [(a_1, a_2)] \oplus [(0_D, 1_D)] = [(a_1, a_2)].$$

Siis nolla-alkioksi saatiin $0_F = [(0_D, 1_D)]$.

Ja lopuksi vielä joukon F mielivaltaisen alkion $[(a_1, a_2)]$ vasta-alkio tulee olemaan $[(-a_1, a_2)]$, jossa $-a_1$ on kokonaisalueessa D alkion a_1 vasta-alkio. Todistetaan tämä käyttäen hyväksi renkaalta periytyvällä lauseen 1.4 ominaisuuksilla. Nyt

$$\begin{aligned}[(a_1, a_2)] \oplus [(-a_1, a_2)] &= [(a_1 \times a_2 + a_2 \times (-a_1), a_2 \times a_2)] \\ &= [(a_1 \times a_2 + (-(a_2 \times a_1)), a_2 \times a_2)] \\ &= [(a_1 \times a_2 + (-(a_1 \times a_2)), a_2 \times a_2)] \\ &= [(0_D, a_2 \times a_2)].\end{aligned}$$

Nyt, jos alkio $[(0_D, a_2 \times a_2)]$ on yhtäsuuri kuin $[(0_D, 1_D)]$, niin vasta-alkio on pätevä. Tutkitaan siis ovatko $(0_D, a_2 \times a_2)$ ja $(0_D, 1_D)$ ekvivalenssirelaatiossa keskenään. Nyt

$$0_D \times 1_D = (a_2 \times a_2) \times 0_D$$

sillä

$$0_D = 0_D.$$

Siis

$$(0_D, a_2 \times a_2) \sim (0_D, 1_D)$$

eli

$$[(0_D, a_2 \times a_2)] = [(0_D, 1_D)].$$

Vasta-alkio on siis pätevä eli $-[(a_1, a_2)] = [(-a_1, a_2)]$ ja pari $(F, \oplus)$ on todistettu abelin ryhmäksi □

Tämän jälkeen todistetaan pari $(F, \otimes)$ monoidiksi.

Todistus. Abelin ryhmän $(F, \oplus)$ todistuksessa todettiin, että joukossa F on ainakin yksi alkio. Lisäksi binäärisyys tutkittiin operaatiota $\otimes$ määritellessä.

Tutkitaan nyt assosiatiivisuus. Olkoon alkiot $[(a_1, a_2)]$, $[(b_1, b_2)]$ ja $[(c_1, c_2)]$ joukosta F. Käytetään hyväksi operaation $\times$ assosiatiivisuutta ja kommutatiivisuutta kokonaisalueessa $(D, +, \times)$. Nyt

$$\begin{aligned}&([(a_1, a_2)] \otimes [(b_1, b_2)]) \otimes [(c_1, c_2)] \\ =&[(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2)] \otimes [(c_1, c_2)] \\ =&[((a_1 \times b_1) \times c_1, (a_2 \times b_2) \times c_2)] \\ =&[(a_1 \times (b_1 \times c_1), a_2 \times (b_2 \times c_2))] \\ =&[(a_1, a_2)] \otimes [(b_1 \times c_1, b_2 \times c_2)] \\ =&[(a_1, a_2)] \otimes ([(b_1, b_2)] \otimes [(c_1, c_2)]).\end{aligned}$$

Assosiatiivisuus on siis voimassa.

Tarkistetaan tässä vaiheessa operaation $\otimes$ kommutatiivisuus. Eli tulisi päteä

$$[(a_1, a_2)] \otimes [(b_1, b_2)] = [(b_1, b_2)] \otimes [(a_1, a_2)].$$

Käytetään tämän todistamiseen hyväksi operaation $\times$ kommutatiivisuutta kokonaisalueessa $(D, +, \times)$. Nyt

$$\begin{aligned}
&[(a_1, a_2)] \otimes [(b_1, b_2)] \\
=&[(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2)] \\
=&[(b_1 \times a_1, b_2 \times a_2)] \\
=&[(b_1, b_2)] \otimes [(a_1, a_2)].
\end{aligned}$$

Kommutatiivisuus on nyt osoitettu.

Tutkitaan lopuksi vielä, onko alkio $[(1_D, 1_D)]$ sopiva ykkösalkio monoidiin. Käytetään hyväksi kokonaisalueen D ykkösalkion ominaisuutta. Nyt

$$[(a_1, a_2)] \otimes [(1_D, 1_D)] = [(a_1 \times 1_D, a_2 \times 1_D)] = [(a_1, a_2)].$$

Kommutatiivisuuden kautta saadaan myös

$$[(1_D, 1_D)] \otimes [(a_1, a_2)] = [(a_1, a_2)] \otimes [(1_D, 1_D)] = [(a_1, a_2)].$$

Täten löydettiin sopiva ykkösalkio $1_F = [(1_D, 1_D)]$ ja pari $(F, \otimes)$ on nyt todistettu monoidiksi. $\square$

Edeltävässä todistettiin myös operaation $\otimes$ kommutatiivisuus, joten kolmikolle $(F, \oplus, \otimes)$ tulee vielä todistaa osittelulait, jotta se olisi kommutatiivinen rengas. Ennen tätä esitetään kuitenkin lemma.

Lemma 2.4. *Joukon F alkion $[(a_1, a_2)]$ molempia komponentteja kertomalla alkiolla b, joka on joukon D ei nolla-alkio, saadaan sama alkio joukossa F. Eli*

$$[(a_1, a_2)] = [(a_1 \times b, a_2 \times b)],$$

kun $[(a_1, a_2)] \in F$ ja $b \in S \setminus \{0_D\}$.

Todistus. Tutkitaan siis ovatko joukon S alkiot (a_1, a_2) ja $(a_1 \times b, a_2 \times b)$ ekvivalenssirelaatiossa. Tällöin tulisi päteä

$$a_1 \times (a_2 \times b) = a_2 \times (a_1 \times b).$$

Tästä saadaan käyttämällä operaation $\times$ assosiatiivisuutta ja kommutatiivisuutta hyväksi

$$a_1 \times a_2 \times b = a_1 \times a_2 \times b.$$

Alkiot (a_1, a_2) ja $(a_1 \times b, a_2 \times b)$ ovat siis ekvivalenssirelaatiossa eli

$$[(a_1, a_2)] = [(a_1 \times b, a_2 \times b)].$$

$\square$

Tutkitaan nyt osittelulait.

Todistus. Osittelulait ovat siis

$$(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c \oplus b \otimes c$$

ja

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c,$$

missä a, b ja $c \in F$. Otetaan siis mielivaltaiset alkiot $[(a_1, a_2)]$, $[(b_1, b_2)]$ ja $[(c_1, c_2)]$ joukosta F ja tutkitaan molemmat lait. Käytetään hyväksi kokonaisalueen $(D, +, \times)$ assosiatiivisuutta, kommutatiivisuutta ja osittelulakeja. Lisäksi hyödynnetään lemmaa 2.4. Nyt

$$\begin{aligned}
&([(a_1, a_2)] \oplus [(b_1, b_2)]) \otimes [(c_1, c_2)] \\
=&[(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1, a_2 \times b_2)] \otimes [(c_1, c_2)] \\
=&[((a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1) \times c_1, (a_2 \times b_2) \times c_2)] \\
=&[((a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1) \times c_1 \times c_2, (a_2 \times b_2) \times c_2 \times c_2)] \\
=&[((a_1 \times b_2) \times (c_1 \times c_2) + (a_2 \times b_1) \times (c_1 \times c_2), (a_2 \times c_2) \times (b_2 \times c_2))] \\
=&[((a_1 \times c_1) \times (b_2 \times c_2) + (a_2 \times c_2) \times (b_1 \times c_1), (a_2 \times c_2) \times (b_2 \times c_2))] \\
=&[(a_1 \times c_1, a_2 \times c_2)] \oplus [(b_1 \times c_1, b_2 \times c_2)] \\
=&[(a_1, a_2)] \otimes [(c_1, c_2)] \oplus [(b_1, b_2)] \otimes [(c_1, c_2)].
\end{aligned}$$

Sitten vielä toinen laki vastaavalla tavalla. Eli

$$\begin{aligned}
&[(a_1, a_2)] \otimes ([(b_1, b_2)] \oplus [(c_1, c_2)]) \\
=&[(a_1, a_2)] \otimes [(b_1 \times c_2 + b_2 \times c_1, b_2 \times c_2)] \\
=&[(a_1 \times (b_1 \times c_2 + b_2 \times c_1), a_2 \times (b_2 \times c_2))] \\
=&[((b_1 \times c_2 + b_2 \times c_1) \times a_1, (b_2 \times c_2) \times a_2)] \\
=&[((b_1 \times c_2 + b_2 \times c_1) \times a_1 \times a_2, (b_2 \times c_2) \times a_2 \times a_2)] \\
=&[((b_1 \times c_2) \times (a_1 \times a_2) + (b_2 \times c_1) \times (a_1 \times a_2), (a_2 \times b_2) \times (a_2 \times c_2))] \\
=&[((a_1 \times b_1) \times (a_2 \times c_2) + (a_2 \times b_2) \times (a_1 \times c_1), (a_2 \times b_2) \times (a_2 \times c_2))] \\
=&[(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2)] \oplus [(a_1 \times c_1, a_2 \times c_2)] \\
=&[(a_1, a_2)] \otimes [(b_1, b_2)] \oplus [(a_1, a_2)] \otimes [(c_1, c_2)].
\end{aligned}$$

Nyt osittelulait on todistettu ja sitä myötä kolmikko $(F, \oplus, \otimes)$ on todistettu kommutatiiviseksi renkaaksi. $\square$

Esitellään tähän väliin todistuksia helpottava lemma renkaan $(F, \oplus, \otimes)$ nolla-alkioista.

Lemma 2.5. *Joukon S alkiot, jotka ovat ekvivalenssirelaatiossa alkion $(0_D, 1_D)$ kanssa, ovat alkiot*

$$\{(0_D, a) \mid a \in D \setminus \{0_D\}\}.$$

Todistus. Todistetaan ensin, että joukon $\{(0_D, a) \mid a \in D \setminus \{0_D\}\}$ alkiot ovat ekvivalenssirelaatiossa alkion $(0_D, 1_D)$ kanssa. Siis yhtälön $0_D \times 1_D = a \times 0_D$ tulisi toteutua. Nyt

$$0_D \times 1_D = a \times 0_D,$$

sillä

$$0_D = 0_D.$$

Selvästi siis $(0_D, a) \sim (0_D, 1_D)$ kaikilla $a \in D \setminus \{0_D\}$. Loput mahdolliset alkiot joukosta S muodostavat joukon $\{(a, b) \mid a, b \in D \setminus \{0_D\}\}$. Tutkitaan voivatko nämä olla ekvivalenssirelaatiossa alkion $(0_D, 1_D)$ kanssa. Siis yhtälön $a \times 1_D = b \times 0_D$ tulisi toteuta. Kuitenkin yhtälöstä

$$a \times 1_D = b \times 0_D$$

saadaan

$$a = 0_D,$$

mikä puolestaan on aina epätosi sillä alkio a ei voi olla nolla-alkio 0_D. Eli ainoaksi vaihtoehdoksi jää alunperin määritelty joukko.

Näin ollen $[(0_D, 1_D)] = [(0_D, a)]$ kaikilla $a \in D \setminus \{0_D\}$. □

Seuraus 2.6. *Renkaan $(F, \oplus, \otimes)$ nolla-alkiossa ainoastaan ensimmäinen komponentti vaikuttaa siihen, että onko kyseessä nolla-alkio vai ei. Ensimmäisen komponentin tulee olla 0_D.*

Lopuksi vielä loppurutistuksena todistetaan kommutatiivinen rengas $(F, \oplus, \otimes)$ kunnaksi etsimällä käänteisalkiot siellä.

Todistus. Seuraavaksi etsitään joukon $F \setminus \{0_F\}$ alkioiden käänteisalkiot. Kokeillaan mielivaltaisen alkion $[(a_1, a_2)] \in F \setminus \{0_F\}$ käänteisalkioksi alkiota $[(a_2, a_1)]$. Alkio $[(a_2, a_1)]$ on joukon F alkio, sillä alkio a_1 on eri suuri kuin kokonaisalueen D nolla-alkio 0_D. Nyt

$$[(a_1, a_2)] \times [(a_2, a_1)] = [(a_1 \times a_2, a_2 \times a_1)].$$

Tästä tulisi puolestaan tutkia onko $[(a_1 \times a_2, a_2 \times a_1)]$ yhtäsuuri kuin joukon F ykkösalkio $1_F = [(1_D, 1_D)]$. Jotta näin olisi täytyy yhtälön

$$(a_1 \times a_2) \times 1_D = (a_2 \times a_1) \times 1_D$$

päteä. Nyt

$$\begin{aligned}(a_1 \times a_2) \times 1_D =& a_1 \times a_2\\ =& a_2 \times a_1\\ =& (a_2 \times a_1) \times 1_D.\end{aligned}$$

Eli alkio $[(a_1 \times a_2, a_2 \times a_1)]$ on renkaan $(F, \oplus, \otimes)$ ykkösalkio. Näin ollen $[(a_1, a_2)]^{-1} = [(a_2, a_1)]$. Täten kaikille alkioille joukossa F on käänteisalkio ja rengas $(F, \oplus, \otimes)$ on nyt kunta. □

2.4 Joukossa F on alikokonaisalue D

Meillä on vielä esitettävänä, että kunta F, jonka rakensimme, sisältää kokonaisalueen D. Tämän voimme esittää käyttämällä hyväksi isomorfismia f.

Lemma 2.7. *Kuvaus $f : D \to F$ määriteltynä $f(a) = [(a, 1_D)]$ on kokonaisalueen $(D, +, \times)$ isomorfismi kunnan $(F, \oplus, \otimes)$ alirenkaan $(K, \oplus, \otimes)$ kanssa.*

Todistus. Otetaan mielivaltaiset alkiot a ja b joukosta D ja käydään isomorfismin määritelmä 1.13 läpi. Aloitetaan ensimmäisestä ehdosta. Eli

$$\begin{aligned}&f(a+b) = [(a+b, 1_D)]\\ &= [((a \times 1_D) + (b \times 1_D), 1_D \times 1_D)]\\ &= [(a, 1_D)] \oplus [(b, 1_D)]\\ &= f(a) \oplus f(b).\end{aligned}$$

Toinen saadaan samaan tyyliin. Eli

$$\begin{aligned}&f(a \times b) = [(a \times b, 1_D)]\\ &= [(a \times b, 1_D \times 1_D)]\\ &= [(a, 1_D)] \otimes [(b, 1_D)]\\ &= f(a) \otimes f(b).\end{aligned}$$

Ykkösalkio menee myös yhtä lyhesti. Eli

$$f(1_D) = [(1_D, 1_D)] = 1_F.$$

Seuraavaksi tulee osoittaa kuvaus f bijektioksi. Aloitetaan osoittamalla injektiivisyys. Tulee siis osoittaa, että jos $f(a) = f(b)$, niin $a = b$. Lähdetään tutkimaan tätä. Nyt

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow [(a, 1_D)] = [(b, 1_D)].$$

Tästä nähdään, että joukon S alkiot $(a, 1_D)$ ja $(b, 1_D)$ ovat ekvivalenssirelaatiossa keskenään. Eli niille pätee

$$a \times 1_D = 1_D \times b,$$

eli

$$a = b.$$

Näin saatiin $a = b$, josta nähdään, että injektiivisyys on voimassa. Seuraavaksi näytetään surjektiivisuus, joka muodostetaan nyt joukon $f[D] = \{f(a) \mid a \in D\}$ kanssa. Joukossa $f[D]$ on ainoastaan joukon D alkioiden kuvat eli surjektiivisuus pätee. Nyt kokonaisalue D ja alirengas $f[D]$ ovat isomorfisia. Isomorfismin myötä myös $f[D]$ on nyt kokonaisalue. □

Kokonaisalueen $(D, +, \times)$ ja kunnan $(F, \oplus, \otimes)$ alirenkaan $(f[D], \oplus, \otimes)$ isomorfismista nähdään, että rengas $(f[D], \oplus, \otimes)$ on oikeastaan kokonaisalue, koska kolmikko $(D, +, \times)$ on kokonaisalue.

Otetaan nyt käyttöön uusi merkintä.

Määritelmä 2.8. Olkoon merkintä / kunnassa F siten, että kunnan F alkioilla $a = [(a_1, a_2)]$ ja $b = [(b_1, b_2)]$ pätee

$$a/b = a \otimes b^{-1}.$$

Tutkitaan joukon F mielivaltaista alkiota $[(a, b)]$. Nyt

$$[(a, b)] = [(a \times 1_D, 1_D \times b)] = [(a, 1_D)] \otimes [(1_D, b)] = [(a, 1_D)] \otimes [(b, 1_D)]^{-1}.$$

Hyödynnetään sitten äskeistä merkintää. Nyt

$$[(a, 1_D)] \otimes [(b, 1_D)]^{-1} = [(a, 1_D)]/[(b, 1_D)].$$

Tästä voimme vielä merkitä käyttäen kuvausta f. Eli

$$[(a, 1_D)]/[(b, 1_D)] = f(a)/f(b).$$

Joukon F kaikki alkiot voidaan esittää kahdella joukon D alkioilla. Eli

$$[(a, b)] = f(a)/f(b).$$

Tutkitaan vielä kuinka operaatiot esitetään käyttäen pelkästään joukon D alkioita ja operaatioita. Aloitetaan yhteenlaskuoperaatiolla. Otetaan joukon F alkiot $f(a_1)/f(a_2)$ ja $f(b_1)/f(b_2)$. Nyt

$$\begin{aligned}
&f(a_1)/f(a_2) \oplus f(b_1)/f(b_2) \\
=&[(a_1, a_2)] \oplus [(b_1, b_2)] \\
=&[(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1, a_2 \times b_2)] \\
=&f(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1)/f(a_2 \times b_2).
\end{aligned}$$

Seuraavaksi kerto-operaatio. Nyt

$$\begin{aligned}
&f(a_1)/f(a_2) \otimes f(b_1)/f(b_2) \\
=&[(a_1, a_2)] \otimes [(b_1, b_2)] \\
=&[(a_1 \times b_1, a_2 \times b_2)] \\
=&f(a_1 \times b_1)/f(a_2 \times b_2).
\end{aligned}$$

Nyt saatiin siis molemmat operaatiot esitettyä käyttäen pelkästään kokonaisalueen D operaatioita ja alkioita.

Nyt on siis todistettu seuraava lause.

Lause 2.9. *Jokainen kokonaisalue D voidaan laajentaa kunnaksi F siten, että jokainen kunnan F alkio voidaan esittää kahden kokonaisalueen D alkion avulla.*

Isomorfismin f perusteella tiedetään, että kokonaisalueen D alkioille löytyy vastaava alkio kokonaisalueesta $f[D]$, jotka voidaan siten samaistaa kokonaisalueen D alkioiden kanssa. Samaistetaan siis nämä ja merkitään mielivaltaista kunnan F alkiota $f(a_1)/f(a_2)$ alkiolla a_1/a_2. Samalla voidaan kirjoittaa yhteenlaskuoperaatio $\oplus$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}
f(a_1)/f(a_2) \oplus f(b_1)/f(b_2) &= f(a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1)/f(a_2 \times b_2) \\
a_1/a_2 \oplus b_1/b_2 &= (a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1)/(a_2 \times b_2).
\end{aligned}$$

Kertolaskuoperaatio $\otimes$ voidaan kirjoittaa samaan tapaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
f(a_1)/f(a_2) \otimes f(b_1)/f(b_2) =&f(a_1 \times b_1)/f(a_2 \times b_2) \\
a_1/a_2 \otimes b_1/b_2 =&(a_1 \times b_1)/(a_2 \times b_2).
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.10. Olkoon kokonaisalue $(D, +, \times)$. Tästä kokonaisalueesta rakennettu *osamääräkunta* $(F, \oplus, \otimes)$ määritellään siten, että siinä on alkiot

$$F = \{a/b \mid a \in D \text{ ja } b \in D \setminus \{0_D\}\}.$$

Kunnan alkiot a_1/a_2 ja b_1/b_2 ovat yhtäsuuret, kun

$$a_1 \times b_2 = a_2 \times b_1.$$

Lisäksi kunnan alkio $a/1_D$ vastaa kokonaisalueen D alkioita a.

Kunnassa on yhteenlaskuoperaatio $\oplus$ siten, että

$$a_1/a_2 \oplus b_1/b_2 = (a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1)/(a_2 \times b_2), \text{ kun } a_1/a_2 \text{ ja } b_1/b_2 \in F,$$

ja kertolaskuoperaatio $\otimes$ siten, että

$$a_1/a_2 \otimes b_1/b_2 = (a_1 \times b_1)/(a_2 \times b_2), \text{ kun } a_1/a_2 \text{ ja } b_1/b_2 \in F.$$

Näistä muodostuu osamääräkunta $(F, \oplus, \otimes)$.

Lause 2.11. *Osamääräkunnassa* $(F, \oplus, \otimes)$ *voidaan laventaa sen alkiota* a/b*, kertomalla sen molempia puolia, millä tahansa joukon* D *ei nolla-alkiolla* c*. Näin tehtäessä saadaan sama alkio. Eli*

$$a/b = (a \times c)/(b \times c).$$

Todistus. Olkoon osamääräkunnan $(F, \oplus, \otimes)$ alkio a/b ja kokonaisalueen D, josta osamääräkunta on rakennnettu, ei nolla-alkio c. Avataan alkio a/b alkukantaisempaan muotoonsa. Nyt

$$a/b = [(a, b)].$$

Tästä voidaan jatkaa lemman 2.4 nojalla. Nyt

$$[(a, b)] = [(a \times c, b \times c)] = (a \times c)/(b \times c).$$

Siis $a/b = (a \times c)/(b \times c)$. Osamääräkunnassa siis toimii nyt lavennus. □

2.5 Kunta F on osajoukkona kaikissa kokonaisalueen D sisältävissä kunnissa

Osamääräkunnalla on itseasiassa ominaisuus, että kaikki kunnat L, jotka sisältävät kokonaisalueen D, sisältävät myös osamääräkunnan F. Tämän todistamiseen käytetään taas hyväksi isomorfismia.

Lause 2.12. *Olkoon kunta* $(F, \oplus_F, \otimes_F)$ *kokonaisalueen* $(D, +, \times)$ *osamääräkunta ja olkoon kunta* $(L, \oplus_L, \otimes_L)$ *kokonaisalueen* D *sisältävä kunta. Silloin on olemassa kuvaus* $f : F \to L$*, joka antaa isomorfismin kunnan* F *ja jonkin kunnan* L *alikunnan kanssa ja lisäksi* $f(a) = a$*, kun* $a \in D$*.*

Todistus. Merkitään tässä todistuksessa määritelmän 2.8 merkintää / merkinnällä $/_F$, joka siis toimii osamääräkunnassa F. Puolestaan kunnalle L voidaan määritellä merkintä $/_L$ seuraavasti:

$$a \otimes_L b^{-1} = a /_L\, b,$$

kun alkiot a ja b ovat kunnasta L.

Tässä vaiheessa on myös hyvä huomata, että koska molemmilla kunnilla on sama alikokonaisalue $(D, +, \times)$, niin niillä on myös sama operaatio kun operoidaan pelkästään kokonaisalueen D alkioita keskenään. Eli, kun $a, b \in D$, niin yhteenlaskulle pätee:

$$a + b = a \oplus_L b = a \oplus_F b.$$

Samoin kertolaskulle pätee:

$$a \times b = a \otimes_L b = a \otimes_F b.$$

Siirrytään nyt varsinaisen kuvauksen rakentamiseen. Aluksi määritellään

$$f(a) = a, \text{ kun } a \in D.$$

Sitten puolestaan loput kunnassa F olevat alkiot voidaan esittää kahden kokonaisalueen D alkion avulla. Joten kuvauksen f määritelmää jatketaan

$$f(a/_F\, b) = f(a)/_L\, f(b).$$

Tutkitaan onko kuvaus f hyvin määritelty. Ensinnäkin jotta alkio $f(a)/_L\, f(b)$, joka voitiin myös esittää muodossa $f(a) \otimes_L f(b)^{-1}$, olisi olemassa täytyy siinä olevalle alkiolle $f(b)$ löytyä käänteisalkio. Käänteisalkio löytyy kaikille joukon L alkioille paitsi nolla-alkiolle. Koska b ei ole nolla alkio ja kuvauksen f määritelmän mukaan $b = f(b)$, niin myöskään $f(b)$ ei ole nolla-alkio.

Lisäksi, kun $a/_F\, b = c/_F\, d$, niin tulisi myös $f(a/_F\, b) = f(c/_F\, d)$ toteutua. Kunnan F ekvivalenssirelaation myötä

$$a/_F\, b = c/_F\, d \Leftrightarrow a \times d = b \times c.$$

Puolestaan yhtälön $f(a/_F\, b) = f(c/_F\, d)$ puolelta voidaan avata

$$f(a)/_L\, f(b) = f(c)/_L\, f(d).$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet alkioilla $f(d)$ ja $f(b)$. Nyt

$$f(a)/_L\, f(b) \otimes_L (f(d) \otimes_L f(b)) = f(c)/_L\, f(d) \otimes_L (f(d) \otimes_L f(b)).$$

Aukaistaan sitten merkintä /. Eli

$$f(a) \otimes_L f(b)^{-1} \otimes_L f(d) \otimes_L f(b) = f(c) \otimes_L f(d)^{-1} \otimes_L f(d) \otimes_L f(b).$$

Alkion käänteisalkiolla kerrottaessa saadaan ykkösalkio, joka on kunnalla L sama kuin sen alikokonaisalueen ykkösalkio. Siis

$$f(a) \otimes_L f(d) \otimes_L 1_D = f(c) \otimes_L f(b) \otimes_L 1_D.$$

Lopuksi vielä sievennetään. Nyt

$$f(a) \otimes_L f(d) = f(c) \otimes_L f(b),$$

joka voidaan aukaista vielä muotoon, jossa operoidaan keskenään kokonaisalueen D alkioita,

$$a \times d = b \times c.$$

Molemmilta puolilta saatiin siis $a \times d = b \times c$. Eli samoilla joukon F alkiolla saadaan kuvauksella f sama alkio joukossa L. Kuvaus f on siis määritelty hyvin.

Lähdetään nyt tutkimaan isomorfismin määritelmää. Ensimmäisen kohdan puolesta tulisi päteä $f(x \otimes_F y) = f(x) \otimes_L f(y)$ kaikilla $x, y \in F$. Lähdetään tutkimaan tätä, kun $x = a/_F\, b$ ja $y = c/_F\, d$. Nyt

$$\begin{aligned}
f(x \otimes_F y) &= f(a/_F\, b \otimes_F c/_F\, d) \\
&= f((a \times c)/_F\, (b \times d)) \\
&= f(a \times c)/_L\, f(b \times d) \\
&= (a \times c)/_L\, (b \times d) \\
&= (a \times c) \otimes_L (b \times d)^{-1} \\
&= a \otimes_L c \otimes_L b^{-1} \otimes_L d^{-1} \\
&= a \otimes_L b^{-1} \otimes_L c \otimes_L d^{-1} \\
&= a/_L\, b \otimes_L c/_L\, d \\
&= f(a)/_L\, f(b) \otimes_L f(c)/_L\, f(d) \\
&= f(a/_F\, b) \otimes_L f(c/_F\, d) \\
&= f(x) \otimes_L f(y).
\end{aligned}$$

Seuraavaksi osoitetaan yhtälö $f(x \oplus_F y) = f(x) \oplus_L f(y)$ kaikilla $x, y \in F$. Nyt

$$\begin{aligned}
f(x \oplus_F y) &= f(a/_F\, b \oplus_F c/_F\, d) \\
&= f((a \times d + b \times c)/_F\, (b \times d)) \\
&= f(a \times d + b \times c)/_L\, f(b \times d) \\
&= (a \times d + b \times c)/_L\, (b \times d) \\
&= (a \times d + b \times c) \otimes_L (b \times d)^{-1} \\
&= (a \times d + b \times c) \otimes_L b^{-1} \otimes_L d^{-1} \\
&= (a \otimes_L d \otimes_L b^{-1} \otimes_L d^{-1}) \oplus_L (b \otimes_L c \otimes_L b^{-1} \otimes_L d^{-1}) \\
&= (a \otimes_L b^{-1}) \oplus_L (c \otimes_L d^{-1}) \\
&= a/_L\, b \oplus_L c/_L\, d \\
&= f(a)/_L\, f(b) \oplus_L f(c)/_L\, f(d) \\
&= f(a/_F\, b) \oplus_L f(c/_F\, d) \\
&= f(x) \oplus_L f(y).
\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi injektio. Kun $f(a/_F\, b) = f(c/_F\, d)$, niin saadaan

$$f(a)/_L\, f(b) = f(c)/_L\, f(d),$$

josta puolestaan voidaan avata merkintä $/_L$. Eli

$$f(a) \otimes_L f(b)^{-1} = f(c) \otimes_L f(d)^{-1}.$$

Kerrotaan nyt molemmat puolet alkioilla $f(b)$ ja $f(d)$. Siis

$$f(a) \otimes_L f(b)^{-1} \otimes_L f(b) \otimes_L f(d) = f(c) \otimes_L f(d)^{-1} \otimes_L f(b) \otimes_L f(d).$$

Tästä puolestaan voidaan kertoa alkiot ja niiden käänteisalkiot pois. Saadaan

$$f(a) \otimes_L f(d) = f(b) \otimes_L f(c),$$

josta voidaan vielä käyttää kuvausta f. Eli saadaan

$$a \times d = b \times c.$$

Osamääräkunnalla F tiedetään, että kun yhtälö $a \times d = b \times c$ toteutuu, niin silloin, kunnan F alkiot $a/_F\, b$ ja $c/_F\, d$ ovat yhtäsuuret. Eli saadaan

$$a/_F\, b = c/_F\, d.$$

Kuvaus f on siis bijektio joukosta F joukkoon $f[F]$ ja tätä myötä kuvaus f on isomorfismi joukkojen F ja $f[F]$ välillä. Isomorfismin myötä $f[F]$ on selvästi kunta ja siten kunnan L alikunta. □

Seuraus 2.13. *Jokainen kunta L, joka sisältää kokonaisalueen D, sisältää myös kokonaisalueesta D muodostuvan osamääräkunnan F.*

Todistus. Lauseen 2.12 todistuksessa jokainen kokonaisalueen D osamääräkunnan F alkio saatiin kuvattua isomorfisella kuvauksella kunnan $f[F]$ alkioksi. Koska kunta $f[F]$ on kunnan L alikunta on myös osamääräkunta F kunnan L alikunta ja täten kunta L sisältää osamääräkunnan F □

Seuraus 2.14. *Kaikki kokonaisalueen D osamääräkunnat ovat isomorfisia keskenään.*

Todistus. Olkoon kokonaisalueen D osamääräkunnat F ja L. Nyt lauseen 2.12 nojalla kunta F on isomorfinen kunnan L alikunnan $f[F]$ kanssa. Kuitenkin seurauksen 2.13 nojalla kunta $f[F]$ sisältää kunnan L. Eli $L = f[F]$, jolloin F on isomorfinen kunnan L kanssa. □

Lähdeluettelo

[1] Fraleigh B.: *A first course in abstract algebra, 7th edition*, Pearson education, Boston, 2003.

[2] Myllylä K., Niemenmaa M., Törmä T.: *Algebran perusteet*, 802354A. Luentomateriaali, Oulun yliopisto, 2020.

[3] Myllylä K., Niemenmaa M., Törmä T.: *Algebralliset rakenteet*, 802355A. Luentomateriaali, Oulun yliopisto, 2019.